Els camps de galga clàssics i la interacció electromagnètica

Josep Graells* **i Carme Martín**†
Departament de Física Aplicada i Òptica. UB

Introducció

En aquest article s'exposa l'estructura fisicomatemàtica elemental de les teories de galga clàssiques.[1] Amb aquest objectiu, s'analitza la interacció electromagnètica maxwel·liana dins el context del Programa galga, i també es donen algunes indicacions de com la interacció gravitatòria pot ser-hi incorporada.

Per començar l'article s'estima pertinent recordar, en un resum, les primeres etapes del procés de creació del Programa galga. Aquest resum s'explica en el primer apartat, «La gènesi de les teories de galga», en el qual s'introdueixen els conceptes bàsics, la nomenclatura i les motivacions físiques que van conduir a la visió galga de les interaccions fonamentals.

L'apartat que el segueix, «L'exemple de l'electromagnetisme», que és el nucli d'aquest article, s'empra per concretar els conceptes bàsics de les teories de galga i, al mateix temps, exposar el caràcter geomètric galga de la interacció electromagnètica. Aquest darrer aspecte encara no és gaire habitual en els tractats de teoria clàssica de camps.

Els resultats d'aquest apartat motiven que s'intenti descriure la interacció gravitatòria en funció d'un camp tensorial simètric de segon ordre en l'espaitemps de Minkowski, tal com van fer S. N. Gupta (1957), W. E. Thirring (1960) i R. P. Feynman (1962), entre d'altres. Aquesta formulació de la interacció gravitatòria es resumeix en l'apartat «L'inici de la visió galga de la interacció gravitatòria», en el qual s'expliquen les inevitables inconsistències inherents a la formulació minkowskiana de la interacció gravitatòria, i alhora es donen indicacions de com es van superar dins el marc de les teories de galga.

En el darrer apartat «Conclusions» es fa un resum dels aspectes desenvolupats que es consideren més rellevants dins el context galga de la interacció electromagnètica.

Esdevé pertinent resumir l'estructura didàctica d'aquest article mitjançant la primera part de l'esquema de C. N. Yang, que es reprodueix tot seguit:

Invariància de galga ↘ ↙ Mecànica quàntica

L'electromagnetisme és un camp de galga (fase)
(Teoria de camp lineal)
↓
Camp de galga no abelià
(Teoria de camp no lineal)
↓
Geometria dels espais fibrats

La gènesi de les teories de galga

> «[...] we physicist-chauvinist-pigs regard mathematics as the mare handmaiden of physics. Flights of mathematical fancy are tolerated only insofar as they are tethered to observable physical phenomena [...] Amen.»
>
> Sheldon L. Glashow
>
> GEORGI, H. *Lie algebras in particle physics. From isospin to unified theories*, Benjamin/Cummings (1982).

A mitjan dècada dels cinquanta i principi de la dels seixanta del segle XX, s'anaven consolidant, en el domini de la física de partícules elementals, un conjunt de teories anomenades *teories de galga*. Aquestes teories naixeren amb greus i difícils problemes fenomenològics, els quals les feien allunyar de la realitat experimental. Però alhora es caracteritzaven per una estructura matemàtica i geomètrica comuna, a partir de la qual s'albirava la possibilitat d'una descripció més profunda de les interaccions fonamentals. L'electromagnetisme maxwel·lià, formulat en funció del potencial vector, i encara molt més acuradament l'electrodinàmica quàntica, en constituïen l'exemple paradigmàtic. Cal tenir present, però, que

*Josep Graells i Casanellas (Cervera, 1946) és pèrit industrial elèctric per l'Escola d'Enginyeria Tècnica Industrial de Terrassa (1967) i doctor en Física per la Universitat de Barcelona (1978).

†Carme Martín i Torres (Barcelona, 1950) és doctora en Física per la Universitat de Barcelona (1981) i professora del col·legi La Salle Gràcia.

[1] Es pressuposa que el lector coneix la formulació minkowskiana de la relativitat especial i els rudiments de la teoria de grups. En l'apèndix s'expliquen els conceptes bàsics de la teoria de grups de Lie.

el procés d'emergència d'aquestes teories va seguir una lenta evolució temporal constituïda per diverses etapes, unes etapes que modulen i difuminen l'evolució científica que ha representat el desenvolupament del Programa galga. Per això, s'estima oportú fer tot seguit un resum dels primers estadis d'aquest procés per facilitar l'objectiu didàctic d'aquest article. La utilització de la paraula *galga* (*gauge*), que qualifica aquestes teories, es va originar en l'article de H. Weyl, «Gravitació i electricitat» (1918). Weyl, amb l'objectiu d'unificar la descripció de les interaccions gravitatòria i electromagnètica (les úniques conegudes en aquell temps), va suposar que els patrons (galgues) l, de longitud i temps, deixen de ser invariables en presència d'un camp electromagnètic. En un desplaçament espaciotemporal dx^α i en presència d'un camp electromagnètic de potencial vector $A_\alpha(x)$, Weyl va postular que el canvi dl experimentat per l és proporcional a l i $A_\alpha(x)$, o sigui: $dl = ClA_\alpha(x)dx^\alpha$. Per motius de comparança posterior, la constant C s'expressarà com q/γ, sent q la càrrega elèctrica (per exemple, la de l'electró) i γ una nova constant. Per a un desplaçament finit $L = L(x_0 \to x)$ entre els esdeveniments x_0 i x, una simple integració proporciona l'expressió per a $l(x)$:

$$l(x) = l(x_0) \exp\left\{\frac{q}{\gamma}\int_L A_\alpha dx^\alpha\right\}.$$

En general $l(x)$ depèn del camí L, o sigui que és una magnitud no integrable. Sols és independent de L quan el tensor camp electromagnètic $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ és zero, ja que $F_{\mu\nu} = 0$ no són sinó les condicions d'integrabilitat del factor exponencial de Weyl. Les equacions de camp de la teoria de Weyl s'obtenen mitjançant l'ampliació de l'estructura geomètrica (afí) de l'espaitemps de la relativitat general, a partir de la qual es deriven les equacions de Maxwell i les d'Einstein. Més concretament, en la teoria de Weyl, la mètrica $\hat{g}_{\mu\nu}$ de l'espaitemps està relacionada amb la mètrica $g_{\mu\nu}$ de la relativitat general, mitjançant l'equació:

$$\hat{g}_{\mu\nu} = \exp\left\{\frac{q}{\gamma}\int_L A_\alpha dx^\alpha\right\} g_{\mu\nu}.$$

És a dir, la mètrica $\hat{g}_{\mu\nu}$ incorpora gravitació ($g_{\mu\nu}$) i electromagnetisme (A_μ), però deixa de ser local i pseudoriemanniana.

Un punt que s'ha de tenir present és que les equacions de camp de la teoria de Weyl resten invariants sota l'acció de les anomenades *transformacions de galga*:

$$\begin{aligned} \hat{g}_{\mu\nu} &\to \hat{g}'_{\mu\nu} = e^{q\alpha/\gamma}\hat{g}_{\mu\nu}(x) \\ A_\mu &\to A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \alpha \end{aligned} \qquad (1)$$

on $\alpha = \alpha(x)$ és una funció diferenciable arbitrària dels esdeveniments de l'espaitemps.

Jutjada matemàticament, la teoria de Weyl pot merèixer les màximes qualificacions, però no és així des d'un punt de vista físic. En efecte, en un *post scriptum* a l'article de Weyl redactat per A. Einstein, es qüestiona d'una manera senzilla i irrefutable aquesta teoria. Einstein raonà que en el cas que fos vàlida, les ratlles espectrals dels àtoms no podrien tenir una freqüència definida i que les freqüències relatives d'àtoms veïns d'un mateix element químic serien, en general, diferents. Com que la Natura no es comporta d'aquesta manera, cal concloure que els patrons espaciotemporals no depenen de la seva història, fet que invalida la teoria de Weyl.

No obstant això, la teoria de Weyl motivà en la dècada de 1920 la creació de diverses teories, l'objectiu de les quals també consistia en la unificació de les interaccions electromagnètica i gravitatòria. Es poden esmentar, per exemple, les teories de Th. Kaluza (1921), O. Klein (1926), V. Fock (1927), etc. Aquestes teories es caracteritzen matemàticament per ampliar la dimensionalitat de l'espaitemps de quatre a cinc dimensions, per poder explicar geomètricament el fenomen electromagnètic. Però cap d'aquests intents no reeixí, i esdevingueren treballs estrictament matemàtics, de caràcter formal. Un aspecte positiu d'aquestes teories és que ajudaren a considerar el vessant geomètric de la interacció electromagnètica i, sobretot, en ampliar la dimensionalitat de l'espaitemps, generaren, a l'inrevés, la necessitat de la creació del *mecanisme de reducció dimensional*. Aquest mecanisme teòric fa aflorar nítidament els anomenats *espais interns*, definits per via de les dimensions extres a l'espaitemps, les quals se les imaginava addicionades a cada esdeveniment de l'espaitemps quadridimensional. Sota aquest punt de vista, cal considerar les transformacions de galga com un grup de transformacions de l'espai *intern*, en front de les transformacions *externes* que actuen sobre els esdeveniments del mateix espaitemps.

Aquest aspecte teòric anticipà una de les idees bàsiques que empraren els matemàtics, uns vint anys després, per crear la teoria dels espais fibrats i ajudaren els físics de partícules elementals, en la dècada de 1950, a intentar donar un significat dinàmic a les simetries algebraiques quàntiques (per exemple, l'isospin), enfront de les simetries espaciotemporals.

Progressivament, es va anar relegant, per manca de significat físic, el factor d'escala de H. Weyl $\exp\left(\frac{q}{\gamma}\int A_\mu dx^\mu\right)$, fins que F. London, el 1927, això és quasi immediatament després de la creació de la mecànica quàntica, va descobrir-ne el significat físic actual.

El factor de galga de H. Weyl s'ha de convertir en un factor de fase, i la constant γ és el nombre imaginari pur $\gamma = -i\hbar$. El factor de fase definit així, en aplicar-lo a la funció d'ona Ψ_0 o amplitud de probabilitat d'una partícula de càrrega q, dóna l'amplitud de probabilitat Ψ quan hi ha un camp electromagnètic $A_\mu(x)$:

$$\Psi_0 \to \Psi = \exp\left\{i\frac{q}{\hbar}\int_L A_\alpha dx^\alpha\right\}\Psi_0.$$

Cal esmentar que, en un article de 1922, E. Schrödinger, emprant la primitiva teoria quàntica de Bohr-Sommerfeld dins el context de la teoria de Kaluza, va deduir que la constant γ hauria de ser igual a $-i\hbar$. Aquesta contribució d'E. Schrödinger és citada per London en l'article de 1927, en el qual també es pregunta per què Schrödinger no la va aplicar a la sèrie d'articles de 1926, en els quals creà la mecànica ondulatòria.[2]

El factor de London proporciona una visió integral de l'anomenat *acoblament mínim*, emprat per introduir (*ad hoc*) la interacció electromagnètica en les equacions diferencials del moviment de les partícules lliures, tant clàssiques com quàntiques, a través de les substitucions:

$$\begin{aligned} p_\mu &\rightarrow p_\mu + qA_\mu \\ i\hbar\partial_\mu &\rightarrow i\hbar D_\mu \equiv i\hbar(\partial_\mu - i\frac{q}{\hbar}A_\mu). \end{aligned}$$

Com s'explicarà més endavant, D_μ representa el procés de derivació natural dins del marc de les teories de galga, les quals s'haurien d'haver anomenat a partir de llavors *teories de fase*, tal com proposà C. N. Yang. En aquest nou context les transformacions de Weyl (1) s'han de reintrerpretar de la manera següent:

$$\begin{aligned} \Psi &\rightarrow \Psi' = e^{iq\alpha/\hbar}\Psi \\ D_\mu\Psi &\rightarrow D'_\mu\Psi' = e^{iq\alpha/\hbar}D_\mu\Psi \\ A_\mu &\rightarrow A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu\alpha. \end{aligned} \tag{2}$$

El descobriment de F. London va ser immediatament acceptat per H. Weyl. Tant és així que el 1929 en l'article «Electró i gravitació» incorpora i generalitza el marc d'aplicabilitat del factor de fase de London. Segons L. O'Raifeartaigh, a aquest article se l'ha de qualificar de seminal, pel seu contingut ampli, nou i complet. Per primera vegada s'exposen idees, conceptes i formulacions que posteriorment han esdevingut estàndards en la teoria de camps. Pel que fa a aquest article, Weyl analitza les interaccions gravitatòria i electromagnètica amb l'objectiu d'evidenciar les seves analogies i diferències estructurals i per primera vegada es defineix i s'aplica el principi de galga per *reinventar* les equacions del camp electromagnètic.

W. Pauli valorà en grau superlatiu aquest treball i incorporà el seu contingut al cèlebre article «Wellenmechanic» de l'*Enciclopedia* (*Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften*). Tant és així que molts físics s'assabentaren del principi de galga i del seu ampli potencial de desenvolupament físic per l'article de Pauli, com el mateix C. N. Yang ho confirmà posteriorment. W. Pauli, que fins llavors era extremament crític respecte de les aportacions físiques, però no de les matemàtiques, de H. Weyl, canvià d'opinió i el va escriure immediatament per felicitar-lo:

> «[...] Ara sí que he d'admetre la seva habilitat en Física, la seva teoria anterior $\hat{g}_{\mu\nu} = \lambda g_{\mu\nu}$ era matemàtica pura, sense contingut físic. Einstein tenia tota la raó en criticar-la i rebutjar-la. Ara l'hora de la seva revenja ha arribat.»

En les dues dècades següents a 1930 la majoria de físics es dedicaren a la recerca en física quàntica, i desvetllaren nous dominis tant de la física fonamental com de l'aplicada. En particular, la difusió i la rellevància que W. Pauli va donar al principi de galga motivaren les importants contribucions de C. N. Yang, R. Mills (1954), R. Utiyama (1956) i J. J. Sakurai (1960).

R. Utiyama formulà la teoria lagrangiana general del que enguany es pot qualificar com a *teories de galga clàssiques*. Segons la formulació de R. Utiyama, l'estructura matemàtica del principi de galga es pot resumir així:

1. Sigui un sistema físic, el lagrangià del qual és invariant sota l'acció d'un grup de Lie[3] de transformacions G. A aquest grup se'l qualifica de global per remarcar que els seus paràmetres són independents dels esdeveniments de l'espaitemps.

2. Llavors, el sistema físic també restarà invariant quan els paràmetres del grup G es facin dependre de l'espaitemps, o sigui, quan G esdevingui local, $G \rightarrow G(x)$, sempre que les derivades ordinàries ∂_μ se substitueixin per les anomenades *derivades covariants galga* $D_\mu \equiv \partial_\mu + A_\mu$.

$A_\mu(x)$ són els anomenats *camps de galga*. Aquests camps prenen valors a l'àlgebra de Lie del grup G. És a dir, si T_i són els generadors de l'àlgebra de Lie, llavors $A_\mu = T_i A^i_\mu(x)$. Físicament, significa que en forçar la invariància local del sistema original, és obligada la introducció dels camps A_μ

En l'apartat següent es desenvolupen aquests dos punts aplicant-los a la interacció electromagnètica.

Paral·lelament, la teoria matemàtica de la geometria diferencial anava progressant, en part per les motivacions físiques i les pròpies sol·licitacions matemàtiques de les teories esmentades. Els desenvolupaments matemàtics van associats a Levi-Civita, E. Cartan, de Rham, Whitney, Hodge, Stenrod i Ehresmann, els treballs dels quals cristal·litzaren a començament de la dècada de 1950 en la teoria dels espais fibrats, que esdevé la formulació geomètrica idònia per a les teories de galga clàssiques, com quedarà palès més endavant.

Els desenvolupaments posteriors a 1960, que obren el període pròpiament quàntic de 1960 a 1975, s'expliquen, per exemple, en l'article de Domènec Espriu: «La naturalesa quàntica de les interaccions febles al descobert. El Premi Nobel de Gerard't Hooft i Martin Veltman», en la *Revista de Física* **2**, núm. 8 (1er semestre 2000). En

[2] Els sis articles fonamentals de 1926 i les quatre conferències que Schrödinger va dictar en la *Royal Institution* de Londres el 1928, es poden trobar a *Collected papers on wave mechanics* d'E. Schrödinger, tercera edició augmentada (Chealsea, 1982).

[3] En l'apèndix es resumeixen les propietats elementals dels grups de Lie que s'empren en aquest article.

aquest article s'explica com es van superar els problemes fenomenològics esmentats en la «Introducció», per exemple, la generació de massa d'alguns camps de galga i la renormalització del procés pertorbatiu, així com les dificultats que encara perduren.

L'exemple de l'electromagnetisme

Les equacions de Maxwell en l'espaitemps minkowskià i en funció del potencial vector $A^\mu = (\phi, \vec{A})$, s'expressen

$$\partial_\alpha \partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta (\partial_\alpha A^\alpha) = j^\beta, \tag{3}$$

on $j^\beta = (\rho, \vec{j})$ és el quadrivector corrent elèctric. L'equació (3) i el tensor camp electromagnètic $F_{\mu\nu} = \partial\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = (\vec{E}, \vec{B})$ resten invariants sota l'acció de les transformacions de A_μ:

$$A_\mu(x) \to A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu \alpha(x) \tag{4}$$

on $\alpha(x)$ és una funció diferenciable arbitrària de les coordenades de l'esdeveniment x.

Aquesta invariància de les equacions de l'electromagnetisme implica que a tot fenomen electromagnètic li correspon una família de potencials vectors $\{A_\mu(x)\}$, els membres de la qual estan relacionats mitjançant les equacions (4). Atès que la seqüència de dues transformacions consecutives, de funcions $\alpha_1(x)$ i $\alpha_2(x)$, és equivalent a una única transformació de funció $\alpha(x) = \alpha_1(x) + \alpha_2(x)$, resulta que per a cada x fix, les transformacions (4) formen un grup commutatiu (abelià), amb un únic paràmetre α (vegeu l'apèndix). Com s'ha anticipat en la «Introducció», és habitual anomenar-lo *grup de galga de la interacció*. Pel que fa a la topologia de l'espai de grup, per exemple, si el paràmetre α pren valors sobre la recta real o sobre un cercle, sols cal tenir present el factor de fase de London per suposar, raonablement, que és un cercle, els punts del qual s'acostumen a representar com segueix:

$$u(x) = e^{iq\alpha(x)/\hbar}.$$

A aquest grup se'l coneix com a $U(1)$, per recordar-nos que els seus elements $u(x)$ són transformacions unitàries, és a dir $u(x) \cdot u(x)^\dagger = 1$, i unidimensionals.

Esdevé útil imaginar que en cada esdeveniment de l'espaitemps hi ha addicionat el cercle de l'espai del grup, el qual es qualifica d'espai *intern* enfront de l'espai *extern* constituït per l'espaitemps minkowskià M_4. Per tant, la descripció de la interacció electromagnètica condueix de manera natural a definir l'espai $P \equiv M_4 \times U(1)$. Més endavant s'aprofundirà en aquesta descripció matemàtica, però abans és convenient recordar dos aspectes, relacionats entre ells, inherents a la representació dels fenòmens electromagnètics mitjançant la família $\{A_\mu(x)\}$.

La primera observació rau en el fet que l'equació (3) no admet cap funció de Green (propagador) si prèviament no es trenca la simetria galga de l'equació, o sigui, si no es limita l'ambigüitat que en la representació dels fenòmens electromagnètics incorpora $A\mu$, deguda a les transformacions (4). És habitual restringir l'ambigüitat imposant una condició diferencial sobre A_μ. Els físics diuen que es tracta de fixar una galga, per exemple $\nabla \cdot \vec{A} = 0$ en l'anomenada *galga de radiació*. En general, aquests lligams no són invariants de Lorentz, llevat de la galga de Lorentz $\partial_\alpha A^\alpha = 0$.

La segona observació fa referència al fet que la fixació d'una galga involucra tant la invariància de galga com la invariància de Lorentz. En efecte, dos observadors en referencials inercials diferents, òbviament, tenen llibertat d'escollir el mateix lligam, per exemple, la galga de radiació, $\nabla \cdot \vec{A} = 0$ en un referencial inercial i $\nabla' \cdot \vec{A}' = 0$ en l'altre. Si L^ν_μ és la transformació de Lorentz entre ambdós referencials, necessàriament se li ha d'associar una transformació de galga $\alpha(x)$ perquè ambdós observadors verifiquin la mateixa galga, per exemple, de radiació; és a dir:

$$A'_\mu(x') = L^\nu_\mu A_\nu(x) + \partial_{\mu'} \alpha(x').$$

Això demostra que el potencial vector A_μ no es transforma com un quadrivector ($A'_\mu = L^\nu_\mu A_\nu$), i que per tant es tracta d'una entitat matemàtica diferent, que, en transformar-la d'un referencial inercial a un altre, ha de poder seleccionar un terme extra $\partial_\mu \alpha$. Es pot interpretar que aquest terme es genera per la rotació necessària que s'ha d'efectuar en l'espai (cercle) del grup $U(1)$ perquè així es verifiqui la galga escollida en ambdós referencials. En el cas de la galga de Lorentz, $\partial_\alpha A^\alpha = 0$, la rotació interna es neutralitza, d'aquí que aquesta galga amagui la vertadera natura matemàtica de A_μ. Aquestes dues consideracions estan directament relacionades amb el desenvolupament del principi de galga que tot seguit s'explicarà.

Per començar, es considerarà una partícula lliure, de càrrega elèctrica q. En mecànica quàntica la partícula amb càrrega q es descriu mitjançant una funció d'ona $\Psi(x)$.[4] Les equacions que governen la dinàmica del camp $\Psi(x)$, és habitual obtenir-les aplicant el principi variacional de Hamilton $\delta \int \mathcal{L}^{(0)} d^4x = 0$, on $\mathcal{L}^{(0)}(\Psi, \partial_\mu \Psi)$ és la densitat lagrangiana lliure. Aquest és el procediment estàndard per deduir les equacions d'Euler-Lagrange per a Ψ:

$$\partial_\mu \left[\frac{\partial}{\partial(\partial_\mu \Psi)} \mathcal{L}^{(0)} \right] - \frac{\partial}{\partial \Psi} \mathcal{L}^{(0)} = 0. \tag{5}$$

$\mathcal{L}^{(0)}$ a més de ser invariant de Lorentz, també és invariant sota les transformacions uniparamètriques següents:

$$\Psi(x) \to \Psi'(x) = e^{iq\alpha/\hbar} \Psi(x) \equiv u\, \Psi(x)$$

on α és un nombre real. Aquesta invariància és conseqüència directa de l'hermiticitat de $\mathcal{L}^{(0)}$, ($\mathcal{L}^{(0)} = \mathcal{L}^{(0)\dagger}$),

[4] Per exemple, $\Psi(x)$ és la funció d'ona (spinor) de Dirac si es tracta d'una partícula de càrrega q i de spin 1/2.

és a dir, en $\mathcal{L}^{(0)}$, $\Psi(x)$ sempre va acompanyat de l'hermític conjugat $\Psi(x)^\dagger$. Els físics diuen que el sistema lliure $\mathcal{L}^{(0)}$ posseeix una simetria $U(1)$ global, per poder explicitar que α és un nombre real igual per a tots els esdeveniments de l'espaitemps. Però si α es considera una funció diferenciable dels esdeveniments x, $\alpha = \alpha(x)$, és a dir, si les transformacions $U(1)$ passen a ser locals, com en les transformacions (4), llavors, $\mathcal{L}^{(0)}$ i, en conseqüència, les equacions de moviment per a Ψ, deixen de ser invariants. En efecte, en $\mathcal{L}^{(0)}$ intervenen termes del tipus $\Psi^\dagger \partial_\mu \Psi$, que no són invariants sota l'acció local de $U(1)$, perquè $\partial_\mu \Psi$ no es transforma com ho fa Ψ, sinó de la manera següent:

$$\begin{aligned} \partial_\mu \Psi \quad &\rightarrow \quad \partial_\mu \Psi' = \partial_\mu (u(x)\Psi(x)) = \\ &= \quad u(x)(\partial_\mu + u^{-1}(x)\partial_\mu u(x))\Psi(x). \end{aligned} \tag{6}$$

Aquest resultat matemàtic demostra que si es vol forçar la invariància local del sistema físic $\mathcal{L}^{(0)}$, s'està conduït a modificar $\mathcal{L}^{(0)}$ i, en conseqüència, a modificar també les equacions (5), mitjançant la introducció d'uns termes *ex novo* que compensin o neutralitzin el component afí $(u^{-1}\partial_\mu u)\Psi$ de (6). Atès que aquests termes s'han d'acoblar a Ψ, el sistema físic deixa de ser lliure i s'ha de suposar que interacciona amb uns camps nous, anomenats de galga, que òbviament cal identificar. H. Weyl va definir el principi de galga com el procés fisicomatemàtic que explica les modificacions que experimenta un sistema físic en passar d'una simetria global a una de local. En l'exemple que ens ocupa, o sigui, el d'obligar que la simetria $U(1)$ global esdevingui local, es concreta en determinar els camps de galga, les seves fonts, la seva dinàmica i com interactuen amb el sistema lliure original $\mathcal{L}^{(0)}$. Això fa plantejar-se la qüestió de quin és el mecanisme que permet d'introduir i definir els camps de galga. La idea de la resposta resta amagada dins del mateix principi de galga, ja que indica que els efectes físics generats pels camps de galga poden ser emulats localment mitjançant una transformació de galga $u(x)$. Per tant, és raonable, observant l'expressió (6), que els camps de galga s'introdueixin a través del procés de derivació mitjançant la definició de l'anomenada *derivada covariant galga* D_μ:

$$\partial_\mu \rightarrow D_\mu \equiv \partial_\mu - i\frac{q}{\hbar}A_\mu, \tag{7}$$

en què A_μ és el camp de galga. D'aquesta manera, en imposar que $D_\mu \Psi$ es transformi com ho fa Ψ, és a dir, $D_\mu \Psi \rightarrow D'_\mu \Psi' = u(x) D_\mu \Psi$, s'obté la llei de transformació de A_μ, el segon sumand de la qual cancel·la o compensa el terme afí de l'equació (6):

$$\begin{aligned} A_\mu(x) \quad &\rightarrow \quad A'_\mu(x) = \\ &= \quad u(x)A_\mu u^{-1}(x) - i\frac{\hbar}{q}(\partial_\mu u(x))u^{-1}(x). \end{aligned} \tag{8}$$

Tenint en compte que $u(x) = \exp(iq\alpha(x)/\hbar)$, l'equació (8) coincideix amb la llei de transformació (4) del potencial vector electromagnètic.

Els camps de galga A_μ que hem acabat d'introduir plantegen immediatament una sèrie de qüestions que tot seguit es formularan i a les quals s'intentarà donar resposta. La pregunta clau de si existeixen en la naturalesa, aquests camps, quedarà contestada automàticament en desenvolupar el principi de galga. Per començar, és pertinent inferir les equacions de camp que governen la dinàmica de A_μ, la qual cosa equival a postular la seva densitat lagrangiana $L^{(A)}$. Per fer-ho se suposarà que en $L^{(A)}$ sols intervenen derivades primeres de A_μ i que, a més, és invariant sota l'acció dels grups de Lorentz i $U(1)$ local. Com que $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ és un tensor de Lorentz i covariant sota l'acció del grup de galga $U(1)$, és raonable fer la hipòtesi:

$$L^{(A)} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}. \tag{9}$$

Com és conegut, les equacions d'Euler-Lagrange per a aquesta densitat lagrangiana condueixen a les equacions de Maxwell lliures, és a dir, a les equacions (3) quan $j^\beta = 0$. El pas lògic següent és preguntar-se pel «mecanisme» d'interacció entre Ψ i A_μ. El mateix principi de galga també proporciona la resposta, ja que sols cal substituir ∂_μ per D_μ en $\mathcal{L}^{(0)}(\Psi, \partial_\mu \Psi)$:

$$\mathcal{L}^{(0)}(\Psi, \partial_\mu \Psi) \rightarrow \mathcal{L}^{(0)}(\Psi, D_\mu \Psi) = \mathcal{L}'(\Psi, \partial_\mu \Psi, A_\mu).$$

Si tot seguit es té en compte que, en la majoria de casos físicament rellevants (Dirac, Duffin-Kemer-Petiu, Bargmann-Wigner, etc.), la dependència de $\mathcal{L}'$ en camps que poden assimilar-se a A_μ és lineal, un simple desenvolupament de Taylor en A_μ dóna:

$$\begin{aligned} &\mathcal{L}'(\Psi, \partial_\mu \Psi, A_\mu) = \\ = \quad &\mathcal{L}^{(0)}(\Psi, \partial_\mu \Psi) + \left[\frac{\partial}{\partial A^\mu}\mathcal{L}'\right]_{A\mu=0} A^\mu \equiv \mathcal{L}^{(0)} + \mathcal{L}^{(I)}, \end{aligned}$$

on s'ha definit el lagrangià d'interacció:

$$\mathcal{L}^{(I)} \equiv \left[\frac{\partial}{\partial A^\mu}\mathcal{L}'\right]_{A\mu=0} A^\mu \equiv -j^\mu A_\mu,$$

en què $j_\mu \equiv \left[\frac{\partial}{\partial A^\mu}\mathcal{L}'\right]_{A\mu=0}$ és el corrent creat per Ψ que genera el camp de galga A_μ. En resum, l'aplicació del principi de galga al sistema lliure $\{\Psi\}$ condueix al sistema acoblat $\{\Psi, A_\mu\}$, descrit per la densitat lagrangiana $\mathcal{L}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{(0)}(\Psi, \partial_\mu \Psi) \quad &\rightarrow \quad \mathcal{L}(\Psi, \partial_\mu \Psi, A_\mu) = \\ \mathcal{L}^{(0)}(\Psi, D_\mu \Psi) + \mathcal{L}^{(A)} \quad &= \quad \mathcal{L}^{(0)}(\Psi, \partial_\mu \Psi) + \mathcal{L}^{(I)} + \mathcal{L}^{(A)}. \end{aligned}$$

En la figura 1 se sintetitza tot el procés.

En emprar la densitat lagrangiana total $\mathcal{L}$ per calcular les equacions d'Euler-Lagrange corresponents als

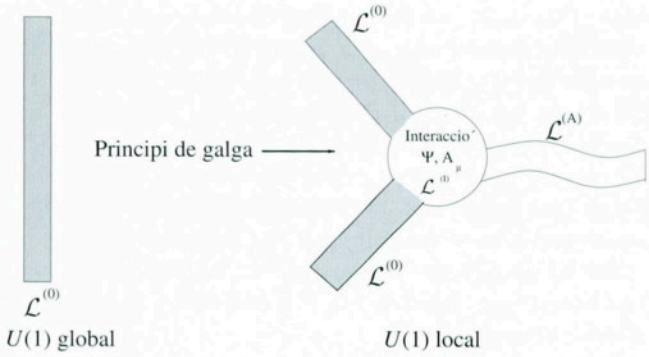

Figura 1: *Esquema del pas d'un grup de galga global a un de local*

camps Ψ i A_μ, s'obtenen les equacions dinàmiques de Ψ interactuant amb A_μ i les del camp de galga A_μ generat pel corrent j^μ. Aquestes darreres no són sinó les equacions de Maxwell (3). És així que es considera *reinventada* la formulació de la interacció electromagnètica mitjançant l'aplicació del principi de galga, tal com va fer H. Weyl per primera vegada el 1929, en identificar el camp de galga A_μ com el potencial vector electromagnètic.

El tensor camp electromagnètic $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, dins el context galga, posseeix una interessant interpretació geomètrica, que s'explica tot seguit. S'ha anticipat que la formulació matemàtica del fenomen electromagnètic condueix, de manera natural, a considerar addicionat a cada esdeveniment x de l'espaitemps minkowskià un cercle de radi unitat, els punts del qual representen possibles transformacions $u(x)$ del grup $U(1)$. D'aquí que s'hagi definit la varietat $\mathcal{P}$ com el producte cartesià de M_4 i $U(1) : \mathcal{P} = M_4 \times U(1)$.

En l'espai $\mathcal{P}$, el trasllat paral·lel, per exemple del camp de matèria $\Psi(x)$, s'ha de definir mitjançant l'equació:

$$D_\mu \Psi = 0 \Leftrightarrow \partial_\mu \Psi = i\frac{q}{\hbar} A_\mu \Psi. \qquad (10)$$

Així doncs, aquesta condició no és sinó la transcripció en l'espai $\mathcal{P}$ de la definició de trasllat paral·lel emprada implícitament en l'espai euclidià de la geometria elemental. Però en $\mathcal{P}$, al contrari que en geometria euclidiana, el trasllat paral·lel de Ψ depèn de la línia emprada. En efecte, en integrar l'equació (10) al llarg de la línia de món $C : \lambda \to x^\alpha(\lambda)$, projecció sobre M_4 de la línia escollida per unir dos punts de $\mathcal{P}$, s'obté:

$$\Psi(x^\alpha; C) = \exp\left\{\frac{iq}{\hbar}\int_C A_\mu dx^\mu\right\}\Psi(x^\alpha(\lambda_0)). \qquad (11)$$

Per tant, $\Psi(x^\alpha; C)$ serà independent de C si ho és el factor de fase, és a dir, si $\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = F_{\mu\nu} = 0$, que no són sinó les condicions d'integrabilitat del sistema (10). Físicament, equivalen a l'absència de camp electromagnètic. Aquest resultat demostra que l'espai $\mathcal{P}$, si $F_{\mu\nu} \neq 0$, és un espai corbat, la curvatura del qual és generada pel corrent elèctric j^β i és mesurada per $F_{\mu\nu}$. Per aprofundir en aquest sentit, és il·lustratiu integrar el factor de fase de l'equació (11), al llarg d'una corba tancada, o sigui, el contorn d'una 2-superfície S, $C = \partial(S)$ i tot seguit aplicar el teorema de Stokes:

$$\Psi(x^\alpha; \partial(S)) = \exp\left\{\frac{iq}{\hbar}\int_S F_{\mu\nu} dS^{\mu\nu}\right\}\Psi(x_0^\alpha).$$

D'aquesta equació es deriven immediatament els fenòmens d'interferència quàntica de la funció d'ona Ψ, per exemple, l'efecte Bohm-Aharanov (*Revista de Física*, **2**, núm. 4 (1er semestre 1998)). Dins d'aquest context es poden interpretar com una manifestació de la curvatura de l'espai $\mathcal{P}$. Si S és un paral·lelogram infinitesimal de costats $\{\delta x^\mu, dx^\nu\}$, l'expressió integral anterior és equivalent a aplicar a Ψ el commutador de les derivades covariants galga corresponents, com es dedueix amb el desenvolupament de Taylor de l'equació (11):

$$[D_\mu, D_\nu] = -i\frac{q}{\hbar}F_{\mu\nu}. \qquad (12)$$

És una equació que ratifica, des d'un punt de vista fisicogeomètric, que $F_{\mu\nu}$ es pot interpretar com el tensor curvatura de l'espai $\mathcal{P}$.

Estimem que, amb el desenvolupament efectuat, ha quedat palès que la descripció completa del fenomen electromagnètic en presència d'un camp Ψ requereix l'espai $\mathcal{P}$ i l'estructura galga $U(1)$.

En les conclusions d'aquest article es fan una sèrie de consideracions que incideixen en la natura galga del fenomen electromagnètic, i que completen la visió matematicogeomètrica.

L'inici de la visió galga de la interacció gravitatòria

Els èxits que l'electrodinàmica quàntica estava assolint a la dècada de 1950 van induir alguns físics quàntics capdavanters a intentar construir la quantització de la interacció gravitatòria dins del programa de la teoria de camps en l'espaitemps minkowskià, o sigui, dins del marc de la relativitat especial. Per donar resposta a aspectes fenomenològics àmpliament verificats, per exemple, l'acoblament dels camps electromagnètic i gravitatori, la interacció gravitatòria s'ha de representar mitjançant un tensor de segon ordre i simètric $h_{\mu\nu} = h_{\nu\mu}$. En quàntica de camps, $h_{\mu\nu}$ descriu una partícula de spin 2. El límit newtonià i la covariància de Lorentz condueixen a considerar com a font de $h_{\mu\nu}$ el tensor impuls-energia $T_{\mu\nu}$ dels sistemes físics. Tenint en compte la natura de llarg abast de la interacció gravitatòria, no és difícil de demostrar que en l'espaitemps minkowskià l'equació diferencial lineal de segon ordre més general que pot obeir $h_{\mu\nu}$ és:[5]

[5] Vegeu, per exemple, el capítol 3 de *Gravitation and Spacetime* de H. C. Ohanian, R. Ruffini, W. W. Norton, segona edició (1994).

$$\partial_\alpha\partial^\alpha h_{\mu\nu} - (\partial^\alpha\partial_\mu h_{\nu\alpha} + \partial^\alpha\partial_\nu h_{\mu\alpha} + \partial_\mu\partial_\nu h - \eta_{\mu\nu}\partial^\alpha\partial_\alpha h + \eta_{\mu\nu}\partial_\alpha\partial_\beta h^{\alpha\beta} = \kappa T_{\mu\nu}, \quad (13)$$

on $h \equiv h^\alpha_\alpha$ i κ la constant d'acoblament entre matèria i gravitació.[6]

L'equació (13) resta invariant sota l'acció de les transformacions de $h_{\mu\nu}$ següents:

$$h_{\mu\nu}(x) \to h'_{\mu\nu}(x) = h_{\mu\nu}(x) + \partial_\mu\epsilon_\nu(x) + \partial_\nu\epsilon_\mu(x), \quad (14)$$

on $\epsilon_\mu(x)$ és un camp vectorial diferenciable arbitrari. Aquestes transformacions mantenen un fort paral·lelisme amb les transformacions de galga (4) del camp electromagnètic A_μ, i impliquen que cada fenomen gravitatori està definit per una família $\{h_{\mu\nu}\}$ de camps, els membres de la qual estan relacionats per les transformacions (14). Aquesta llibertat o ambigüitat descriptiva s'aprofita per simplificar l'equació (13) mitjançant la imposició d'una condició diferencial sobre $h_{\mu\nu}$. És habitual restringir l'ambigüitat imposant l'anomenada galga de Hilbert-Lorentz, definida així:

$$\partial^\alpha\Phi_{\alpha\nu} = 0, \qquad \text{sent} \quad \Phi_{\alpha\nu} \equiv h_{\alpha\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\alpha\nu}h. \quad (15)$$

En funció de $\Phi_{\mu\nu}$, l'equació (13) es redueix a la parella d'equacions:

$$\partial_\alpha\partial^\alpha\Phi_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}, \qquad \partial^\alpha\Phi_{\alpha\nu} = 0. \quad (16)$$

Les equacions de camp (13) per $\{h_{\mu\nu}\}$ es corresponen amb les equacions (3) per $\{A_\mu\}$. Ambdós sistemes d'equacions són invariants sota l'acció de les respectives transformacions de galga (14) i (4), la qual cosa implica que les lleis de conservació de la càrrega elèctrica $\partial_\alpha j^\alpha = 0$ i del tensor impuls-energia $\partial_\alpha T^{\alpha\nu} = 0$ es verifiquen automàticament. Però així com la descripció del fenomen electromagnètic mitjançant $\{A_\mu\}$ no inclou cap inconsistència, no passa el mateix amb la corresponent descripció $\{h_{\mu\nu}\}$ de la interacció gravitatòria basada en les equacions (13) o (16). Els punts febles s'originen en la llei de conservació $\partial_\alpha T^{\alpha\nu} = 0$, on $T^{\alpha\nu}$ és el tensor impuls-energia de tots els sistemes físics, llevat del del propi camp gravitatori, com requereix la linealitat de (13) o (16). En efecte, aquesta descripció lineal exclou l'acoblament necessari del camp gravitatori amb ell mateix, perquè, com tot sistema físic, pel fet de posseir energia ha de ser *gravitatòriament carregat*, en contraposició al camp electromagnètic que és elèctricament neutre. A més a més, com que les equacions de camp determinen l'acció de la matèria sobre el camp, barren el pas a la reacció del camp sobre la matèria en verificar-se $\partial_\alpha T^{\alpha\nu} = 0$.

[6] El límit newtonià de l'equació (13), o sigui, l'equació de Poisson, proporciona la relació entre κ i la constant gravitatòria $G : \kappa = (16\pi G/c^4)^{1/2}$.

Una estratègia per superar les dues inconsistències esmentades consisteix a incloure en $T^{\alpha\nu}$ el tensor impuls-energia de $h_{\mu\nu}$. Aquest procediment porta a un desenvolupament pertorbatiu d'aproximacions successives que implica abandonar la teoria lineal. R. P. Feynman el va emprar per intentar construir la teoria quàntica del camp gravitatori durant la dècada de 1952-62. El 1962 abandonà aquest mètode, perquè conduïa a termes infinits no eliminables mitjançant les tècniques de renormalització que donaven tan bons resultats en electrodinàmica quàntica.

El fet és que Feynman i altres que assajaven procediments pertorbatius retrobaven, en el límit clàssic, les equacions geomètriques d'Einstein o d'altres de semblants. Tant és així que en la conferència vuitena d'un curs de doctorat que Feynman impartí a Caltech durant l'any acadèmic 1962-63, expressa:

> «[...] En qualsevol cas, el fet és que el camp $h_{\mu\nu}$ té aquesta interpretació geomètrica; això no és fàcilment explicable, és senzillament meravellós. La interpretació geomètrica no és realment necessària o essencial a la física. Podria ser que aquesta coincidència es pogués entendre com la representació d'alguna classe d'invariància de galga.»

W. Pauli va ser molt crític amb les formulacions, fins a la seva mort (1958), que per descobrir la teoria quàntica del camp gravitatori es fonamentaven en la teoria lineal. Pauli opinava que a aquests mètodes, com que no s'incorporava des del primer moment el principi d'equivalència d'Einstein, els mancava un aspecte físic essencial. En canvi, Feynman argüia que preferia seguir l'estratègia pràctica «des de baix cap a dalt» i solucionar els problemes de fons quan es presentessin. Emprant les seves paraules, «maleïts torpedes, a tota màquina...». Altrament, els que opinaven com Pauli seguien l'estratègia teòrica «des de dalt cap a baix». Ara, les dues estratègies s'han superat mitjançant les teories de supergravetat i supercordes, que es poden considerar l'evolució natural que han experimentat les teories quàntiques de galga a partir de 1975.

Però, retornant a la física clàssica, cal recordar que H. Weyl, en l'article de 1929 esmentat, considera i demostra la necessitat fisicomatemàtica de fer dependre dels esdeveniments les transformacions de Lorentz de la relativitat especial. És a dir, emprant la terminologia que s'ha imposat, s'ha de localitzar el grup de Lorentz global $L^\mu_\nu : L^\mu_\nu \to L^\mu_\nu(x)$. La localització del grup de Lorentz $L^\mu_\nu(x)$ implica, automàticament, la localització de les tètrades vectorials $\{e_\mu;\ e_\mu \cdot e_\nu = \eta_{\mu\nu}\}$ de l'espai minkowskià, perquè en cada esdeveniment s'ha de verificar $e_\mu(x) = L^\nu_\mu(x)e_\nu(x)$. Per tant, en presència de la interacció gravitatòria, s'han de transformar en locals els referencials inercials globals de la relativitat especial, tal

com demana el principi d'equivalència d'Einstein. Recordem que el principi d'equivalència d'Einstein identifica els referencials inercials amb laboratoris en caiguda lliure en el camp gravitatori (ascensor d'Einstein).

En un article proper, que completarà aquest, s'explicarà com la interacció gravitatòria es pot incorporar dins el Programa galga. Per fer-ho sols cal desenvolupar l'esquema següent:

Física sense interacció gravitatòria	$\Longrightarrow$	Física amb interacció gravitatòria
Visió: **global**		Visió: **local**
Referencials inercials globals Σ, definits en l'espaitemps minkowskià M_4		Referencials inercials locals $\Sigma(x_0)$ (mútuament accelerats), definits en cada esdeveniment x_0
Coordenades inercials globals		Coordenades inercials locals
Grup de Lorentz algebraic L^μ_ν		Grup de Lorentz dinàmic (galga): $L^\mu_\nu(x)$

Aquest esquema, que sintetitza la formulació de Weyl, de 1929, de la interacció gravitatòria i que va ser generalitzat per R. Utiyama el 1956 (com ja s'ha dit anteriorment), condueix de manera natural a les equacions de la relativitat general d'Einstein, l'aproximació lineal de les quals coincideix amb les equacions (13). Totes les inconsistències esmentades al principi d'aquest apartat, que apareixen en la teoria lineal, no tenen lloc en la teoria no lineal einsteniana, en la qual la física en l'espaitemps minkowskià, o sigui, la relativitat especial, continua sent vàlida localment, és a dir, en un entorn de cada esdeveniment (ascensor d'Einstein).

Conclusions

Els punts següents intenten resumir els aspectes que es consideren més rellevants i característics de l'estructura fisicomatemàtica galga de les interaccions clàssiques.

1. S'ha ratificat que A_μ no és un quadrivector de Lorentz, sinó el que els matemàtics anomenen una *connexió*, ja que defineix el procés de derivació ($D'_\mu \Psi' = u(x) D_\mu \Psi$) en l'espai $\mathcal{P}$ que la naturalesa ha mostrat als físics perquè puguin descriure coherentment el fenomen electromagnètic. Com ja s'ha explicat, aquest espai, en absència de gravitació, consisteix a afegir a cada esdeveniment x de l'espaitemps minkowskià M_4 l'espai del grup $U(1)$.

   L'espai del grup o espai intern també s'anomena *fibra*, ja que $\Psi(x)$ hi pren valors. Per tant, $\Psi(x)$ es pot considerar definit en una secció transversal de l'espai complet $\mathcal{P}$. El desenvolupament matemàtic demostra que en presència de monopols magnètics l'estructura topològica de $\mathcal{P}$ és més complexa, si bé localment sempre és representable mitjançant el producte cartesià $M_4 \times U(1)$. Els matemàtics diuen que es tracta d'un espai fibrat principal no trivial.

2. A_μ s'ha d'interpretar com una 1-forma que pren valors sobre l'àlgebra de Lie (vegeu l'apèndix) del grup $U(1)$. En efecte, aplicant la definició de *generador infinitesimal* T al grup $U(1)$, o sigui, determinant el vector tangent a l'element neutre de l'espai de grup:

$$T = \left(\frac{\partial u(x)}{\partial \alpha} \right)_{\alpha=0} = i\frac{q}{\hbar},$$

   la derivada covariant galga (7) s'expressa: $D_\mu = \partial_\mu - TA_\mu$, o sigui $A = TA_\mu dx^\mu$ és una 1-forma a valors T. Cal observar que la parametrització escollida explicita i introdueix *ad hoc* la càrrega elèctrica q o constant d'acoblament entre $\Psi(x)$ i A^μ.

3. El tensor camp electromagnètic $F_{\mu\nu}$ és invariant sota l'acció de les transformacions de galga $F_{\mu\nu} \to F'_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}$; en canvi, A_μ, en no ser-ho $A_\mu \to A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \alpha$, obre la possibilitat d'emular fenòmens electromagnètics mitjançant una transformació de galga: $A_\mu = \partial_\mu \alpha$, $F_{\mu\nu} = 0$. Ara és pertinent recordar que, fins a començament de la dècada de 1960, la gran majoria de físics opinaven que de la llibertat de galga s'inferia la manca de significat físic de A_μ. Per exemple, F. Rohrlich, en la magnífica i consultada monografia *Classical charged particles* de 1965, escriu en la pàgina 65: «[...] A_μ no té cap significació física, i s'introdueix solament amb el propòsit de simplificar matemàticament les equacions.»

   Aquesta interpretació de A_μ canvià radicalment com a conseqüència de l'experiment de Bohm-Aharonov i el desenvolupament fisicomatemàtic de les teories de galga, a partir de les quals, com s'ha explicitat en aquest article, s'evidencia la necessitat dels dos nivells {connexió (A_μ), curvatura ($F_{\mu\nu}$)}$\equiv$ {potencial vector (A_μ), tensor camp electromagnètic ($F_{\mu\nu}$)} definits en l'espai $\mathcal{P}$, per a la descripció completa dels fenòmens electromagnètics.

   Potser l'espai $\mathcal{P}$ esdevé difícil de visualitzar atès que no és un espai mètric, ja que la interacció electromagnètica és un fenomen essencialment no mètric. D'aquí el fracàs físic de la teoria de Weyl de 1918.

4. En canvi, com que la interacció gravitatòria és un fenomen físic essencialment mètric, requereix per a la seva descripció completa dels tres nivells {mètrica, camp de galga, camp gravitatori} definits i a la vegada definidors de l'espaitemps. Els camps de galga són entitats deduïbles a partir del nivell mètric, fet que, com a teoria de galga clàssica, confereix a la relativitat general una natura molt peculiar i única, tal com s'explicarà en un article proper.

Apèndix

Alguns conceptes bàsics de la teoria de grups de Lie

Els grups que són més útils en les teories de galga són els grups de Lie. Aquests grups G posseeixen un nombre infinit d'elements, els quals, alhora, formen un espai (varietat), i les operacions del grup són aplicacions infinitament diferenciables, o sigui:

$$\begin{aligned} G \times G \to G &: (x, y) \to x \cdot y \\ G \to G &: x \to x^{-1} \end{aligned}$$

són funcions analítiques.

Per exemple, l'espai euclidià R^n és un grup de Lie sota l'operació d'addició vectorial: $G = \{\Re^n, +\}$. Però, potser, el conjunt de tots els factors de fase de les funcions d'ona $\Psi(x)$ de la mecànica quàntica en constitueix l'exemple més senzill. Un factor de fase es pot escriure:

$$u(\theta) = e^{i\theta}. \tag{17}$$

El producte de dos factors de fase verifica:

$$u(\theta_1) \cdot u(\theta_2) = u(\theta_1 + \theta_2)$$

i l'element invers $u^{-1}(\theta)$, $u^{-1}(\theta) \cdot u(\theta) = 1$ s'expressa:

$$u^{-1}(\theta) = u(-\theta) = u^{\dagger}(\theta).$$

Com s'ha anticipat en diversos punts d'aquest article, aquests factors de fase formen el grup $U(1)$, els elements del qual es representen per les funcions (17) que són unitàries i unidimensionals (uniparamètriques). Cada element de $U(1)$ es caracteritza per un angle θ que pren valors entre 0 i 2π, la qual cosa permet identificar l'espai del grup amb un cercle de radi unitat. El grup $U(1)$ és diferenciable, atès que verifica:

$$u(\theta + d\theta) = u(\theta)(1 + id\theta), \tag{18}$$

una expressió que per a l'element neutre $u(\theta = 0) = 1$ es redueix a

$$u(d\theta) = 1 + id\theta. \tag{19}$$

Un altre exemple, molt familiar en física i geometria elemental, és el grup de les rotacions $O(3)$ de l'espai euclidià tridimensional. En l'estudi de les rotacions del sòlid rígid de la mecànica newtoniana, és habitual parametritzar els elements R de $O(3)$, és a dir, les matrius ortogonals 3×3, amb els tres angles d'Euler. Un altre conjunt de paràmetres molt emprat és $\{\vec{n}, \theta\}$, on θ és l'angle de rotació al voltant de l'eix de vector unitari $\vec{n}$, $\vec{n} \cdot \vec{n} = 1$. En aquest cas la rotació $R(\vec{n}, \theta)$ s'expressa:

$$R(\vec{n}, \theta) = e^{i\theta \vec{n} \cdot \vec{J}}, \tag{20}$$

on $\vec{J}$ és el vector moment angular. La representació (20) de R esdevé l'adequada per determinar l'acció de $O(3)$ sobre les funcions d'ona de la mecànica quàntica. Per a un angle infinitesimal $d\theta$ s'obté:

$$R(\vec{n}, d\theta) = 1 + id\theta \vec{n} \cdot \vec{J}. \tag{21}$$

Les expressions (20) i (21) referents a elements de $O(3)$ mostren un fort paral·lelisme amb les (17) i (19) de $U(1)$. No és gens estrany, perquè el grup U(1) és isomorf amb el grup unidimensional de les rotacions $O(2)$ de l'espai euclidià bidimensional:

$$e^{i\theta} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

El grup de Lie $O(3)$ és tridimensional, ja que són necessaris tres paràmetres $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ o $\{\vec{n}, \theta\}$ per determinar unívocament cada element del grup. Aquests paràmetres es poden emprar com a coordenades per definir l'espai del grup.

L'espai tangent al punt que representa l'element neutre del grup s'anomena *àlgebra de Lie*, per exemple, per al grup $O(3)$, l'equació (21) explicita que els vectors moment angular pertanyen a l'àlgebra de Lie. Els elements de l'àlgebra de Lie s'anomenen *generadors infinitesimals* del grup, atès que, localment, es pot construir el grup mitjançant l'aplicació successiva de transformacions infinitesimals.

El commutador dels generadors defineix l'àlgebra, per exemple, per a O(3) s'obtenen les conegudes relacions de commutació del moment angular:

$$[J_\alpha, J_\beta] = i\epsilon_{\alpha\beta\gamma} J_\gamma.$$

Quan el commutador és zero (per exemple per als grups $U(1)$, $O(2)$), ens porta a teories de galga lineals.

Si els paràmetres del grup prenen valors sobre intervals tancats, com en els exemples esmentats, el grup de Lie s'anomena *compacte*. Aquesta propietat és important atès que permet representar els elements del grup mitjançant matrius unitàries. Un exemple de grup no compacte és el grup de Lorentz.

Segons J. A. Wheeler, una de les grans ensenyances que es deriven de la física einsteniana és que la física esdevé més senzilla si s'observa i s'analitza localment. Des d'aquest punt de vista, és raonable plantejar-se l'acció local dels grups que actuen sobre les magnituds físiques. Aquesta acció local, com s'ha explicitat en aquest article, es pot concretar fent dependre els paràmetres del grup dels esdeveniments de l'espaitemps. Per a la descripció completa de la interacció electromagnètica en presència de $\Psi(x)$, s'ha demostrat la necessitat de l'espai no mètric $\mathcal{P} = M_4 \times U(1)$, que es pot representar simbòlicament en la figura 2.

Agraïments

Ens plau manifestar el nostre reconeixement al molt apreciat i benvolgut professor Dr. Luis Navarro Veguillas pels seus consells encertats i pertinents, que han

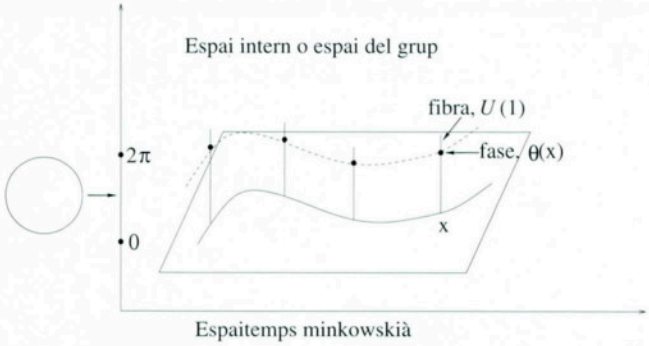

Figura 2: *Representació gràfica de l'espai* $\mathcal{P} = M_4 \times U(1)$

millorat la presentació d'aquest article, l'origen del qual (ja fa més de trenta anys) arranca d'unes motivadores qüestions que va plantejar a un dels autors, referents a un treball d'electrodinàmica quàntica.

Bibliografia

O'RAIFEARTAIGH, L., *The dawning of Gauge Theory*, Princeton University Press (1997).

YANG, C. N., *Geometry and Physics*, To fulfill a Vision, Jerusalen Einstein Centennial Symposium, Ed. Y. Ne'eman, Addison Wesley (1981).

DRESCHSLER, W., MAYER, M. E., *Fiber Bundle Tecniques in Gauge Theories*, Springer-Verlag (1977).

LEITE LOPES, J., *Gauge Field Theories. An Introduction*, Pergamon Press (1981).

FEYNMAN, R. P., MORINIGO, F. B. i WAGNER, W. G., *Feynman Lectures on Gravitation*, Ed. B. Hatfield. Addison-Wesley (1985).

SATTINGER, D. H. i WEAVER, O. L, *Lie Groups and Algebras with Applications to Physics, Geometry and Mechanics*, Springer-Verlag (1986).

Revista de
física

La Revista de Física
és una publicació
de la Societat Catalana de Física.

El seu antecedent immediat
són els Treballs de Física,
sèrie iniciada al 1979,
primera revista especialitzada en Física
publicada a Catalunya,

La Societat Catalana de Física
és una filial de l'Institut d'Estudis Catalans
creada el 1986 a partir de la Secció de Física
de l'antiga Societat Catalana de Ciències
la qual, al seu torn, havia estat fundada l'any 1931.

La Societat Catalana de Física és, doncs,
una entitat jove
que té les seves arrels en la
tradició més genuïna
de la recerca en Física
a Catalunya.

SOCIETAT CATALANA DE FÍSICA
INSTITUT D'ESTUDIS CATALANS